TEORÍA DE ERRORES

Se pretende en este capítulo dar una explicación de la Teoría de Errores, lo más somera posible y fundamentalmente práctica, que pueda servir al alumno cuando efectúe sus trabajos en el Laboratorio de Física, tener en todo momento conciencia de la realidad de los valores que va determinando y entre que límites se está moviendo con relación al valor verdadero de los valores que obtiene.

Por mucha que sea la diligencia y cuidado al realizar cualquier determinación práctica física, y por muy sensibles y precisos que sean los aparatos utilizados, es prácticamente imposible el evitar errores, considerando a éstos como la variación entre los valores hallados y el real o verdadero, el cual generalmente nos es desconocido.

Tampoco el error, aunque lo conociéramos, nos daría una medida cierta de su importancia, ya que ésta dependerá no de la magnitud de dicho error, sino de la magnitud de la medida a valorar y de la necesidad de aproximación a su valor real. Una diferencia, por ejemplo, de 0,1 mm en la medida del espesor de un cabello, no se podrá considerar como buena, pero esa misma diferencia en la medida de la distancia entre Torrelavega y Santander podría considerarse como extraordinaria.

No vamos a entrar en desarrollos complejos matemáticos en esta explicación, sino que vamos a definir los errores que servirán al alumno para saber en que grado de aproximación se encuentra con el valor verdadero, apoyándose en las mediciones obtenidas.

TIPOS DE ERRORES

Los errores pueden ser producidos, por la imprecisión de los aparatos de medida, que reciben el nombre de errores sistemáticos, o causa de agentes externos o del propio operador, que reciben el nombre de errores accidentales. Mientras que los primeros se repiten en el mismo sentido, siempre que se utiliza el mismo aparato de medida, los segundos varían de una experiencia a otra, tanto en valor como en signo.

CLASES DE ERRORES

E1 error en general podemos definirlo como la diferencia que tenemos entre el valor obtenido y el verdadero.

A este error se le denomina "error absoluto" y si llamamos **x** a la medición y **X** al valor verdadero, el error absoluto será:

$$E_a = x - X$$

Otro tipo de error es el "error relativo", definido por el cociente entre el error absoluto y el valor real, dado por la fórmula:

$$E_r = \frac{E_a}{X}$$

MEDIA ARITMÉTICA

Los errores sistemáticos prácticamente se pueden hacer desaparecer, pero no así los accidentales. La experiencia y también la teoría con aplicación del cálculo de probabilidades, demuestra que cuando hacemos una serie de mediciones, unos valores estarán por encima del valor verdadero y otros por debajo, de modo que cuando aumentamos el número de estas observaciones las diferencias por más y por menos con el valor real al hallar la media aritmética de estos valores, se van destruyendo las diferencias, y en general podemos tomar como valor más probable de una serie de mediciones el de su media aritmética, y ésta será tanto más cercana al valor verdadero cuantas más mediciones hagamos.

Es decir, si tenemos una serie de mediciones de una magnitud, **x_1, x_2, x_3,.......** el valor más probable es:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots..}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

DESVIACIONES

Naturalmente que este valor más probable así determinado, no coincidirá ni con e1 valor real, ni con la mayoría de las mediciones hechas.

A la diferencia entre cada una de las medidas obtenidas y el valor más probable se le llama "desviación", la cual podrá ser igual, mayor o menor que cero,

$$\delta = x_i - \bar{x}$$

DIFERENCIA MEDIA Y ERROR MEDIO

La desviación, diferencia media, será la media de las desviaciones, y es a su vez la que nos define el grado de precisión de las observaciones.

Ahora bien, no es conveniente usar las desviaciones en sí para hallar la media aritmética de las desviaciones, pues al ser estas variables por más y por menos se van contrarrestando, dándonos entonces un nivel falso de la precisión. Por ello se toman los valores de los cuadrados de las desviaciones, viniendo entonces la diferencia media definida por:

$$S = \pm\sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n}} \qquad (1)$$

Ya se puede comprender que al no ser δ un valor que marque la diferencia con el valor verdadero, esta diferencia será un valor aproximado.

La verdadera diferencia media, a la que realmente se llama error medio estará definido por

$$m = \pm\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$$

en la que **d**, si será realmente la diferencia entre los valores obtenidos y el verdadero. Esta fórmula no es práctica por no conocer **d**.

Se le suele denominar también diferencia cuadrática media o error cuadrático medio de las desviaciones.

Observemos que en (1) al hacer una única observación, se tendrá que

$$\Sigma\delta^2 = 0$$

y como **n = l**, el valor de **S = 0**, por lo que en este caso tendríamos que la precisión es infinita con una sola medida, lo cual es absurdo. Para salvar este inconveniente se suele tomar como denominador en lugar de **n, (n-1)** y entonces la fórmula a aplicar quedará como sigue:

$$S = \pm\sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n-1}}$$

con lo que en el caso particular que estamos considerando quedaría indeterminada, eliminando el absurdo anterior.

Esta fórmula nos sirve para determinar el error medio de cada observación.

ERROR MEDIO DE LA MEDIA CUADRÁTICA

Por brevedad se le llama error cuadrático, y es el que nos define el error que tenemos con el valor verdadero al tomar como valor de este último el más probable, el cual ya dijimos era la media aritmética.

Si llamamos $\varepsilon_{\mathbf{m}}$ a éste, su valor será:

$$\varepsilon_m = \pm \frac{S}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n(n-1)}}$$

y por tanto podemos decir que $x = \bar{x} \pm \varepsilon_m$

Para mejor comprenderlo pongamos un ejemplo. Es conveniente hacer siempre un cuadro, en el que la primera columna están indicados los datos obtenidos.

Imaginemos que hemos hecho una serie de mediciones del periodo de un péndulo, las cuales están reflejadas en la columna primera del cuadro siguiente:

Medida	**Media**	δ	δ^2
1,3		0,07	49.10^{-4}
1,1		-0,13	169.10^{-4}
1,2		-0,03	9.10^{-4}
1,4		0,17	289.10^{-4}
1,2		-0,03	9.10^{-4}
1,3	1,23	0,07	49.10^{-4}
1,2		-0,03	9.10^{-4}
1,1		-0,13	169.10^{-4}
1,3		0,07	49.10^{-4}
1,2		-0,03	9.10^{-4}

Del cuadro tendremos $\Sigma\delta^2 = 810.10^{-4}$

y por tanto $\varepsilon_m = \pm\sqrt{\frac{810.10^{-4}}{10.9}} = \pm 0{,}03 \text{ s}$

con lo que el valor será: $1{,}23 \pm 0{,}03$ s

E1 valor correspondiente del error relativo será:

e_r = 0,03/ 1,23 = 0,024 o el 2,4 %.

GENERALIZACIÓN DE LA FORMULA ANTERIOR

Puede ocurrir que el valor que queremos determinar en lugar de depender de una sola variable, como en el caso anterior, dependa de varias, es decir

$$G = f\ (g_1, g_2, g_3, \ldots\ldots)$$

Anteriormente a la obtención final de **G**, habremos calculado cada uno de los valores interiores del paréntesis, que constarán del más probable más, menos su error.

Queremos hallar la variación de **G** con respecto a una de las variables, luego diferenciando esa expresión, como función de varias variables, con respecto a cada una de ellas, tendremos

$$\delta(G) = \frac{\delta f}{\delta g_1}\delta g_1 + \frac{\delta f}{\delta g_2}\delta g_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

E1 valor del segundo miembro será por tanto el error.

Debemos de tener en cuenta que todos los términos de este segundo miembro se tomarán siempre con su valor positivo.

Como en el caso anterior creemos que un ejemplo aclarará todos los conceptos, y para ello vamos por lo tanto a determinar la densidad de un cuerpo cilíndrico.

La densidad es la relación entre la masa y el volumen, y éste a su vez dependerá según la fórmula geométrica del radio y la altura,

$$d = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 h}$$

Lo primero y con los aparatos correspondientes determinaremos los valores correspondientes a la masa, al radio y a la altura. Supongamos que los valores obtenidos sean los siguientes:

$$m = 45{,}734 \pm 0{,}002 \text{ gr} \qquad \delta m = 0{,}002$$

$$R = 0{,}698 \pm 0{,}001 \text{ cm} \qquad \delta R = 0{,}001$$

$$h = 3{,}818 \pm 0{,}003 \text{ cm} \qquad \delta h = 0{,}003$$

Entonces $$d_a = \frac{45{,}734}{3{,}14 x 0{,}698^2 x 3{,}818} = 7{,}830 \text{ g/cm}^3$$

Para determinar su error diferenciamos la fórmula general y tendremos

$$\delta_{(d)} = \left(\frac{\delta d}{\delta m}\right)\delta_{(m)} + \left(\frac{\delta d}{\delta R}\right)\delta R + \left(\frac{\delta d}{\delta h}\right)\delta h = \frac{1}{\pi R^2 h}\delta(m) + \frac{2m}{\pi R^3 h}\delta R + \frac{m}{\pi R^2 h^2}\delta h =$$

$$= \frac{m}{\pi R^2 h}\left[\frac{\delta m}{m} + 2\frac{\delta R}{R} + \frac{\delta h}{h}\right] = 7{,}830\left[\frac{0{,}002}{45{,}734} + 2.\frac{0{,}001}{0{,}698} + \frac{0{,}003}{3{,}818}\right]$$

$$\delta(d) = \pm 0{,}029$$

por tanto el valor de la densidad será

$$d = 7{,}830 \pm 0{,}03 \ \ g/cm^3$$

Otra manera muy útil de calcular el error de una expresión complicada es la siguiente:

Se calcula el logaritmo neperiano de la expresión, se diferencia y se hacen positivos todos los términos de la diferencial.

En el caso anterior

$$d = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 . H}$$

luego $\ln d = \ln M - \ln(\pi R^2 \times H)$

diferenciando $\frac{d(d)}{d} = \frac{dM}{M} - 2.\frac{dR}{R} - \frac{dH}{H}$

Considerando las diferenciales como errores absolutos y las variables como los valores supuestos exactos, tendremos:

$$d(d) = d\left[\frac{dM}{M} + 2.\frac{dR}{R} + \frac{dH}{H}\right]$$

llegando al mismo valor anteriormente calculado.